

# ÜBER KOMPRESSIBLE ERSATZFLUIDE FÜR ISOTHERME ZWEI-PHASEN-ZWEI-KOMPONENTEN-STRÖMUNGEN

H. D. EIGNER

Österreichische Studiengesellschaft für Atomenergie Ges. m.b.h., Lenaugasse 10, A 1082 Wien, Austria

(Received 13 January 1969)

**Zusammenfassung**—Es wird ein logisch konsistenter Satz von Gleichungen zur Beschreibung von isothermen Zwei-Phasen-Zwei-Komponenten-Strömungen, bei denen Dissipationsenergien vernachlässigbar sind, angegeben, der es erlaubt, das vorliegende umfangreiche Material über Schallgeschwindigkeitsmessungen in Zwei-Phasen-Strömungen auszuwerten. Genauer wird auf das Strömungsbild der Pfropfen-Strömung eingegangen.

## NOMENKLATUR

$a$ ,	Schallgeschwindigkeit;
$b_1$ ,	$\lambda L_r/2d$ ;
$b_2$ ,	$gL_r/a_1^2$ ;
$d$ ,	Durchmesser [m];
$F$ ,	Reibungskraft pro Volumseinheit [kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup> ];
$g$ ,	9,81 m/s <sup>2</sup> ;
$j$ ,	$\sqrt{-1}$ ;
$L$ ,	Kanallänge, Rohrlänge [m];
$m$ ,	Molekulargewicht [kg/Mol];
$n$ ,	$a_i/a_1$ ;
$p$ ,	Druck [kg/ms <sup>2</sup> ];
$p/a_1^2\rho_1$ ,	$p^+$ ;
$R$ ,	8,317 J/grd Mol;
$t$ ,	Zeit [s];
$t/t_r$ ,	$t^+$ ;
$t_r$ ,	$L_r/a_1$ ,
$T$ ,	Temperatur [grad K];
$u$ ,	Geschwindigkeit [m/s];
$u/a_1$ ,	$u^+$ ;
$w$ ,	$\rho u$ Massengeschwindigkeit [kg/m <sup>2</sup> s];
$x$ ,	Koordinate [m];
$x/L_r$ ,	$x^+$ .

## Griechische Buchstaben

$\alpha$ , Gasgehalt (void fraction);

$\lambda$ ,	0,3164 $Re^{-1/4}$ (Reibungskoeffizient nach Blasius [12]);
$\mu$ ,	dynamische Viskosität [kg/ms];
$\rho$ ,	Dichte [kg/m <sup>3</sup> ];
$\rho/\rho_2, \rho/\rho_r$ ,	$\rho^+$ ;
$\chi$ ,	flow quality.

## Tiefgesetzte Indices

$g$ ,	gasförmig;
$i$ ,	inlet (eingangsseitig);
$l$ ,	liquid (flüssig);
$r$ ,	Referenzgrößen bezeichnend.

## Hochgestellte Indices

$+$ ,	dimensionslose Größen bezeichnend.
-------	------------------------------------

## Dimensionslose Gruppen

$Re$ ,	$w_d/\mu$ Reynolds-Zahl.
--------	--------------------------

## 1. EINLEITUNG

DIE METHODE der kompressiblen Ersatzfluide für isotherme Zwei-Phasen-Zwei-Komponenten-Strömungen war vom Verfasser schon in zwei früheren Arbeiten [1, 2] angewendet worden; sie eignet sich wegen der auftretenden

Phasenwechsel weniger für Zwei-Phasen-Eine-Komponente-Strömungen. Die Resultate der vorhin erwähnten Arbeiten waren insofern noch unbefriedigend, als die Zustandsgleichung des Erstfluids physikalisch sich an die isotherme Zustandsgleichung des idealen Gases lehnte, die zugleich zu den einfachsten, nämlich den linearen barotropen Zustandsgleichungen zählt, was als Argument von mathematischer Seite zählte. Es ergab sich dadurch die Schwierigkeit, dass die Zustandsgleichung des Ersatzfluids für  $\alpha = 1$  nur an einer Stelle ihres örtlichen Geltungsbereiches in die Zustandsgleichung des idealen Gases überging. Diese Schwierigkeit wird durch die nachfolgende Theorie beseitigt, die eindimensional durchgeführt wird, aber ohneweiteres sich auf dreidimensionale Probleme erweitern lässt, da ja dann nur zwei weitere Impulserhaltungsgleichungen für die beiden zusätzlichen Geschwindigkeitskomponenten hinzukommen. Wie schon früher [2] erwähnt, kann die Energiegleichung für  $u < 0,1 a_2$  als identisch erfüllt betrachtet werden.

## 2. ERSTELLUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN

Es gelten die Gleichungen von der Erhaltung von Masse und Impuls [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + F + \rho g = 0; \quad (2)$$

in (1) und (2) treten die Unbekannten  $\rho$ ,  $u$  und  $p$  auf, zu deren Ermittlung noch eine dritte Gleichung notwendig ist, die in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_1^2 f^2(\alpha) = a_2^2, \quad f(1) = 1 \quad (3)$$

gegeben sei;  $\alpha$  ist dabei durch

$$\rho = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_l \quad (4)$$

definiert mit konstantem  $\rho_l$  und der isothermen Zustandsgleichung idealer Gase für  $\rho_g$ :

$$\rho_g \frac{RT}{m_g} = p = a_1^2 \rho_g \quad (5)$$

Eine weitere wichtige Zwei-Phasen-Grösse ist durch

$$\chi \rho = \alpha \rho_g \quad (6)$$

definiert. Es ist zweckmässig (1) bis (6) dimensionslos zu schreiben, wobei noch

$$F = \frac{\lambda}{2d} \rho u^2$$

gewählt werde:

$$\frac{\partial \rho^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial \rho^+}{\partial x^+} + \rho^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} = 0; \quad (7)$$

$$\rho^+ \left( \frac{\partial u^+}{\partial t^+} + u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial p^+}{\partial x^+} + b_1 \rho^+ u^{+2} + b_2 \rho^+ = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial p^+}{\partial \rho^+} = f^2(\alpha) = \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2; \quad (9)$$

$$\rho^+ - 1 = \alpha(\rho_g^+ - 1); \quad (10)$$

$$\rho_g^+ = p^+; \quad (11)$$

$$\chi \rho^+ = \alpha \rho_g^+. \quad (12)$$

Kombination von (9) bis (11) gibt

$$\frac{d(\rho^+ - 1)}{\rho^+ - 1} = \frac{d\alpha}{\alpha[1 - \alpha f^2(\alpha)]} = \left( \frac{A_0}{\alpha} + \frac{A_1}{\alpha - \alpha_1} + \dots + \frac{A_v}{\alpha - \alpha_v} + \frac{A_{v+1}}{\alpha - 1} \right) d\alpha, \quad (13)$$

wobei die  $\alpha_v$  die von 1 verschiedenen Wurzeln von

$$f(\alpha) = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (14)$$

bedeuten (siehe Abb. 2); Integration von (13) gibt

$$\rho^+ - 1 = \alpha^{A_0} (\alpha - \alpha_1)^{A_1} \dots (\alpha - \alpha_v)^{A_v} \times (\alpha - 1)^{A_{v+1}} B_1; \quad (15)$$

$B_1 \dots$  Integrationskonstante;

aus (15) ersieht man, dass das Vorzeichen von  $A_v$  wichtig ist, weil sich dadurch entscheidet, ob  $\alpha_v$  Nullstelle oder Pol von  $\rho^+ - 1$  ist. Für

$b_1 = b_2 = 0$  lassen sich (7) und (8) exakt linearisieren [4], und man erhält das Gleichungssystem

$$\frac{\partial x^+}{\partial u^+} - u^+ \frac{\partial t^+}{\partial u^+} + \frac{\rho^+ \alpha [1 - \alpha f^2(\alpha)]}{\rho^+ - 1} \times \frac{\partial t^+}{\partial \alpha} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial x^+}{\partial \alpha} - u^+ \frac{\partial t^+}{\partial \alpha} + \frac{(\rho^+ - 1) f^2(\alpha)}{\rho^+ \alpha [1 - \alpha f^2(\alpha)]} \times \frac{\partial t^+}{\partial u^+} = 0 \quad (17)$$

das in weiteren Arbeiten noch behandelt werden wird. Für nicht verschwindendes  $b_1$  und (oder)  $b_2$  ist eine approximativ linearisierte Regelstreckendynamik des Systems (7) bis (12) vorgesehen.

3. SPEZIELLE ZUSTANDSGLEICHUNGEN

3.1  $f(\alpha) = \frac{n}{\alpha(n - 1) + 1}$

Betrachtet man eine Strömung von Gas und Wasser in einem Rohr, wie sie Abb. 1 darstellt

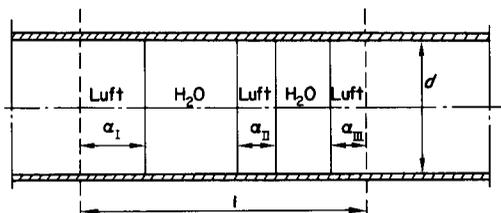


ABB. 1. Idealisertes Strömungsbild der Pfropfen-Strömung (slug flow).

und wie sie etwa der sogenannten Pfropfen-Strömung (slug flow) [5-7] entspricht, so findet man nachfolgende Beziehungen:

$$\frac{(\alpha_I + \alpha_{II} + \alpha_{III}) d^2 \pi \cdot 4}{d^2 \pi \cdot 4} = \alpha$$

$$\frac{1}{a_2} = \frac{\alpha}{a_1} + \frac{1 - \alpha}{a_1}, \quad \frac{a_2}{a_1} = f(\alpha) = \frac{n}{\alpha(n - 1) + 1} \quad (18)$$

zur letzten Gleichung vergleiche man Abb. 2 Gleichung (18) liegt die Annahme zugrunde, dass der Schall in der Richtung der Rohrachse einfällt, was gut realisiert erscheint, da bei einer Abweichung der Schalleinfallrichtung von der

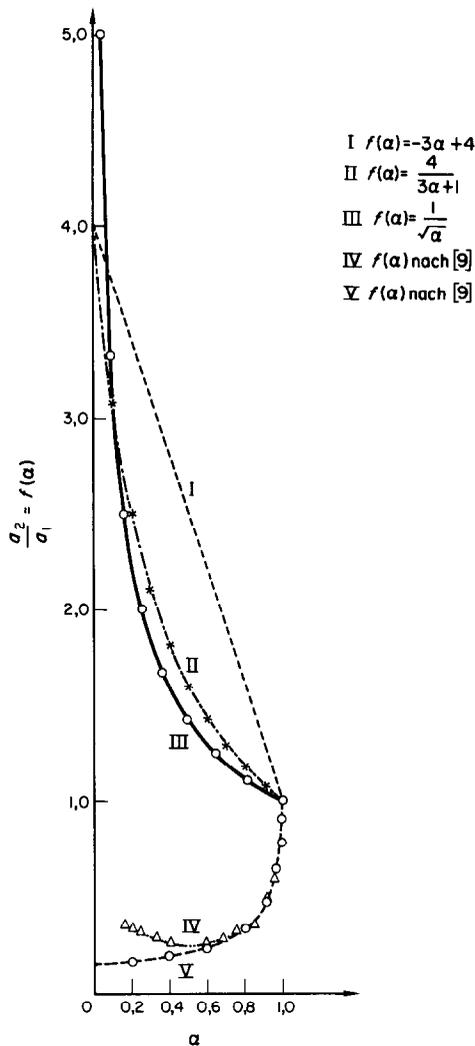


ABB. 2. Schallgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Gasgehalt (void fraction).

Rohrachse von nur  $14,5^\circ$  ( $n = 4$ ) bereits Totalreflexion eintritt [8]. Man sieht aus diesen Überlegungen, wie stark die Reflexions- und Brechungsverhältnisse bzw. das Strömungsbild

(flow pattern) der Zwei-Phasen-Strömung die Funktion  $f(\alpha)$  beeinflussen. Für die Grössen in (15) gilt:

$$\alpha_1 = \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{n}{n-2}$$

$$A_2 = -A_1$$

daher hat man

$$o^+ - 1 = B_1 \alpha \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha(n-1)^2 - 1} \right]^{n/(n-2)} \quad (19)$$

in Abschnitt 4 wird auf (18) und (19) noch einmal zurückgekommen.

### 3.2 $f(\alpha) = (1 - n)\alpha + n$

Diese Zustandsgleichung erhält man, wenn man annimmt, dass sich die Schallgeschwindigkeit des Zwei-Phasen-Fluids in Abhängigkeit von  $\alpha$  linear von der Schallgeschwindigkeit der reinen Flüssigkeit zu der des reinen Gases ändert. Man vergleiche dazu wieder Abb. 2.

Für die Grössen in (15) erhält man:

$${}_1\alpha_2 = \frac{n+1 \pm \sqrt{[(n-1)(n+3)]}}{2(n-1)}$$

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{(n-1) \{ \sqrt{[(n-1)(n+3)]} - n \}}{(3-2n) \sqrt{[(n-1)(n+3)]}}$$

$$A_2 = \frac{(n-1) \{ \sqrt{[(n-1)(n+3)]} + n \}}{(3-2n) \sqrt{[(n-1)(n+3)]}}$$

$$A_3 = -\frac{1}{3-2n}$$

damit wird für  $n = 4$  aus (15)

$$\rho^+ - 1 = B_1 \alpha (\alpha - 1)^{0,2} (\alpha - 1,597)^{-0,076} \times (\alpha - 0,07)^{-1,124}$$

der Pol bei  $\alpha = 1,597$  ist als nicht realisierbar ungefährlich. Hier sei auch noch bemerkt, dass für das experimentelle  $f(\alpha)$  nach Semenov und Kosterin [9] und das theoretische  $f(\alpha)$  nach [2] keine von 1 verschiedenen reellen Lösungen von (14) existieren, daher auch keine gefährlichen Pole auftreten können, wie man Abb. 2 unmittelbar entnehmen kann.

### 4. DER STATIONÄRE FALL 3.1

Es wird zunächst der Fall  $b_1 = b_2 = 0$  behandelt; Aus (7) und (8) erhält man:

$$\rho^+ u^+ = B_2$$

$$B_2 u^+ + p^+ = B_3$$

$B_2, B_3 \dots$  Integrationskonstante; bei gegebenem  $p_i, w_i, \chi_i$  bzw.  $p_i^+ = \rho_{gi}^+, w_i^+, \chi_i$  folgt aus (10) und (12)

$$\alpha_i = \frac{\chi_i}{\rho_{gi}^+(1 - \chi_i) + \chi_i} \quad (20)$$

$$\rho_i^+ = \frac{\rho_{gi}^+}{\rho_{gi}^+(1 - \chi_i) + \chi_i} \quad (21)$$

und für die Integrationskonstanten erhält man

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\rho_{gi}^+ - 1}{\left[ \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i(n-1)^2 - 1} \right]^{n/(n-2)}} \\ B_2 &= w_i^+ \\ B_3 &= B_2 u_i^+ + p_i^+ = \frac{B_2^2}{\rho_i^+} + p_i^+ \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Feldgrössen zeigen in diesem Fall keine Ortsabhängigkeit. Anders liegen die Verhältnisse im Fall nicht verschwindender Reibung und (oder) Schwerkraft. Aus (7) bis (11) ergibt sich mit (15) allgemein

$$\frac{\rho^+ - 1}{\rho^+} \frac{[\rho^+ f(\alpha)]^2 - B_2^2}{1 - \alpha f^2(\alpha)} \times \frac{1}{b_1 B_2^2 + b_2 \rho^{+2}} \frac{d\alpha}{\alpha} + dx^+ = 0$$

und mit (19) im besonderen

$$\frac{\{[\delta^2 - (\gamma - \delta)^2 y^{\gamma-2\delta} + B_1 \delta^2 (1 - y^{\gamma-2\delta}) y^\gamma]^2 - \delta^2 B_2^2 [\delta - (\gamma - \delta) \times y^{\gamma-2\delta}]\} [\delta^2 - (\gamma - \delta)^2 y^{\gamma-2\delta}] y^{\gamma-1} dy}{[\delta^2 - (\gamma - \delta)^2 y^{\gamma-2\delta} + B_1 \delta^2 (1 - y^{\gamma-2\delta}) y^\gamma] \{b_1 B_2^2 [\delta^2 - (\gamma - \delta)^2 y^{\gamma-2\delta}]^2 + b_2 [\delta^2 - (\gamma - \delta)^2 y^{\gamma-2\delta} + B_1 \delta^2 (1 - y^{\gamma-2\delta}) y^\gamma]^2\}} = \frac{dx^+}{-\gamma B_1}, \quad (23)$$

wobei in (23) die bei der Integration einer bilinearen Irrationalität [10] übliche Transformation, in diesem Fall

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha(n - 1)^2 - 1} = y^{\gamma-2\delta} \quad (24)$$

mit

$$n = \frac{\gamma}{\delta}$$

durchgeführt wurde. Für  $n = 4$  erhält man aus (23)

$$\sum_{v=1}^9 \frac{C_v y + D_v}{y^2 - y_v^2} dy = \frac{b_2 B_1^2}{4} dx^+$$

bzw. [11]

$$\prod_{v=1}^9 (y^2 - y_v^2)^{C_v/2} \left| \frac{y - y_v}{y + y_v} \right|^{D_v/2y_v} = B_3 \exp \left[ b_2 \left( \frac{B_1}{2} \right)^2 x^+ \right] \quad (25)$$

wobei gilt:

$$y_v^2 = \xi^\eta \sqrt{[-3^3 \beta + 3^{-3} + (3^6 \beta - 1) \sqrt{\beta}]} + \xi^{3-\eta} \sqrt{[-3^3 \beta + 3^{-3} - (3^6 \beta - 1) \sqrt{\beta}]};$$

$$\beta = \frac{1 + j \varepsilon B_2 \sqrt{(b_1/b_2)}}{3^3 B_1}$$

$$\varepsilon = -1, 0, +1$$

$$\xi^3 = 1$$

$$\eta = 0, 1, 2$$

$$v = 1, 2, \dots, 8, 9$$

interessant ist eine Diskussion von (25); es seien mittels (20)–(22) die Integrationskonstanten  $B_1$ ,  $B_2$  und  $B_3$  bestimmt worden, dann sieht man aus (24) und (25), dass für

$$\alpha = \frac{1}{9} \quad (26)$$

im Falle

$$\sum_{v=1}^9 C_v \geq 0$$

sich

$$x^+ = \pm \infty$$

ergibt, während im Falle

$$\sum_{v=1}^9 C_v = 0 \quad (27)$$

ein endliches  $x^+$  existiert:

$$x^+ = - \frac{\ln B_3}{b_2 (B_1/2)^2} \quad (28)$$

gilt (26) und (27), dann tritt zufolge (10), (11) und (19) bei (28) ein Druck- und Dichtepol auf, der die Geschwindigkeit nach (22) Null werden lässt, d.h. das Rohr verstopft; dies kann als stationäre Instabilität interpretiert werden.

### 5. ZUSAMMENFASSUNG

Die mit einer Arbeit [1] zu einem Symposium in Eindhoven begonnene und mit einer weiteren Arbeit [2] fortgesetzte Methode der kompressiblen Ersatzfluide für isotherme Zwei-Phasen-Zwei-Komponenten-Strömungen findet mit den hier dargelegten Ausführungen—von mathematischen Durchführungen abgesehen—ihren Abschluss. Bemerkenswert an der hier gebotenen Theorie ist, dass die Zustandsgleichung des

Ersatzfluids als Differentialgleichung gegeben ist, die es erlaubt, das umfangreiche experimentelle Material über die Schallgeschwindigkeit in Zwei-Phasen-Strömungen zu verwerten. Die grosse Allgemeinheit der theoretischen Überlegungen ist nur durch die Grösse der auftretenden Dissipationsenergien beschränkt. Interessant ist das Auftreten einer stationären Instabilität im Sonderfall der Pfropfen-Strömung (slug flow).

#### LITERATURHINWEISE

1. H. EIGNER, On the dynamics of a variable density single-fluid model for isothermal two-phase two-component flow. *Proceedings of the Symposium on Two-Phase Flow Dynamics, Eindhoven, Sept. 4th-9th, 1967*.
2. H. EIGNER, Zur Dynamik von kompressiblen Ersatzfluiden für isotherme Zwei-Phasen-Zwei-Komponenten-Strömungen. Erscheint in *Elektrotechnik und Maschinenbau*.
3. S. S. KUTATELADZE and V. M. BORISHANSKII, *A Concise Encyclopedia of Heat Transfer*, pp. 89-94. Pergamon Press, Oxford (1966).
4. D. MORGENSTERN und L. SZABO, Vorlesungen über theoretische Mechanik, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Bd. 112, S. 269-271. Springer-Verlag, Berlin (1961).
5. T. F. IRVINE und J. P. HARTNETT, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 1, pp. 355-359. Academic Press, New York (1964).
6. P. R. GILLI, Forschungen auf dem Gebiet der Filmverdampfung, *Mitteilungen der Vereinigung der Grosskesselbesitzer*, Heft 86, S. 3-15 (Oktober 1963).
7. A. L. DAVIES, The speed of sound in mixtures of water and steam. *Proceedings of the Symposium on Two-Phase Flow Dynamics, 4-9 Sept. Eindhoven, 1967*.
8. W. WEIZEL, *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Bd. 1, S. 296-298, Springer-Verlag, Berlin (1955).
9. N. I. SEMENOV and S. I. KOSTERIN, Results of studying the speed of sound in moving gas-liquid systems, *Teplotenergetika* **11**, 46 (1964).
10. A. DUSCHEK, *Vorlesungen über höhere Mathematik*, Bd. 1, S. 336-337. Springer-Verlag, Wien (1960).
11. A. DUSCHEK, *Vorlesungen über höhere Mathematik*, Bd. 1, S. 206-207. Springer-Verlag, Wien (1960).
12. H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, S. 465. Verlag G. Braun, Karlsruhe (1958).

**Abstract**—A logical consistent set of equations for the description of isothermal two-phase-two-component flows in which dissipation energies can be neglected is presented which allows to evaluate the existing extensive material on speed of sound measurements in two-phase-flows. Especially the flow pattern of slug flow is treated.

**Résumé**—On présente un système logique d'équations pour la description d'écoulements isothermes à deux phases et à deux constituants dans lesquels les énergies de dissipation peuvent être négligées et qui permet l'évaluation des nombreux résultats existants sur les mesures de la vitesse du son dans les écoulements diphasiques. La configuration de l'écoulement par piston est traitée spécialement.

**Аннотация**—Представлена логически последовательная система уравнений для описания изотермических двухфазных двухкомпонентных течений, в которых можно пренебречь энергией диссипации, которая позволяет обработать имеющийся огромный материал по измерению скорости звука в двухфазных течениях. В качестве примера рассматривается стержневое течение.